Tentamen i Mekanik 1 (FFM515/FFM516)

Tid och plats: Måndagen den 13 april 2015 med start 08.30 i M.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 031-7723182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 10.00 och 12.00.

OBS: Tentamen är indelad i **två delar**, del 1 och 2. Du kan välja **ett** av följande alternativ:

- Tentera hela kursen genom att lösa båda delarna av tentan under 5 timmar (sista inlämning 13.30). För att bli godkänd (på tentan och hela kursen) krävs för studenter registrerade på den nya kursen FFM516 minst 6 poäng totalt varav minst 3 poäng på varje del. För studenter registrerade på den gamla kursen FFM515 krävs endast minst 6 poäng totalt, dvs det finns inget krav på minst 3 poäng på varje del av tentan.

- Tentera en del av kursen genom att lösa en av delarna av tentan under 3 timmar (dvs med sista inlämning 11.30). För att bli godkänd på den del studenten valt att tentera krävs minst 3 poäng. Kan vara lämpligt val om man sedan tidigare är godkänd på en del av kursen.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska uttryckas i de storheter som är givna i uppgiftstexten och i tillhörande figur (samt tyngdaccelerationen g om denna behövs) och, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:

- För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 1 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

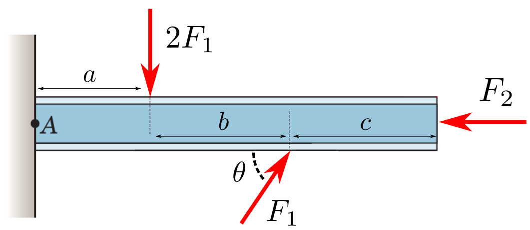
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 3 poäng, vilket innebär totalt maximalt 9 poäng på varje del av tentan, och maximalt 18 poäng på hela tentan. För att bli godkänd på en del av tentan krävs minst tre poäng och 3-5 poäng ger betyg 3, 6-7 poäng ger betyg 4 och 8-9 poäng ger betyg 5. För kraven att bli godkänd på båda delarna av tentan se rutan ovan. Förutsatt att man uppfyller kraven för godkänt är betygsgränserna 6-10 för betyg 3, 11-14 för betyg 4 samt 15-18 för betyg 5.

Rättningsgranskning: Tisdag 28/4 2015 kl.12.00-12.30 i sal FL61.

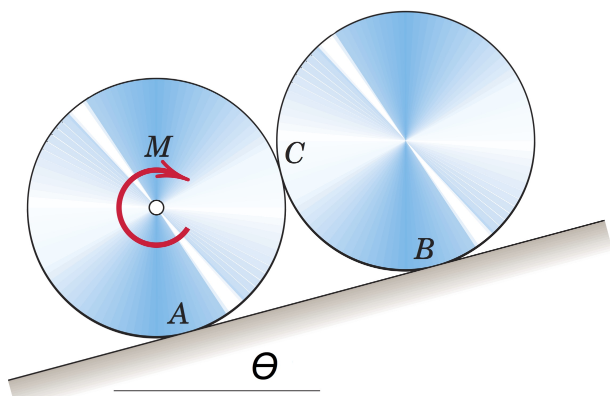
Lycka till!

Del 1

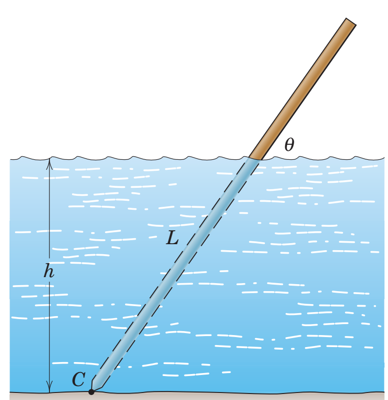
1. a) Ersätt kraftsystemet som verkar på den smala balken (dvs försumma dess höjd i figuren) med ett stelkroppsekvivalent system bestående av en kraft och ett vridmoment i punkten A.
   b) Ersätt kraftsystemet som verkar på den smala balken med ett stelkroppsekvivalent system bestående endast av resultaten av de tre krafterna. Bestäm särskilt avståndet x till höger om punkten A där resultanten verkar.



2. Beräkna vridmomentet M, applicerat på den undre cylindern enligt figuren, som krävs för att (de identiska) cylindrarna ska rulla med konstant hastighet ***nedför*** det lutande planet (vridmomentet M bromsar alltså cylindrarna). De kinetiska samt statiska friktionskoefficienterna för alla kontaktytor är μ_k respektive μ_s. Planets lutningsvinkel är θ, cylindermassan är m och cylinderradien är r. Ni kan anta att glidning ej sker i kontaktpunkterna A och B.



3. Ena änden av en homogen stav av längd L och densitet ρ' är fastsatt i punkten C på botten av en tank med vätska av densitet ρ och djup h. Då $\rho' < \rho$ och $h < L$, beräkna vinkeln θ som staven bildar i förhållande till vätskeytan (se figur) vid jämvikt.

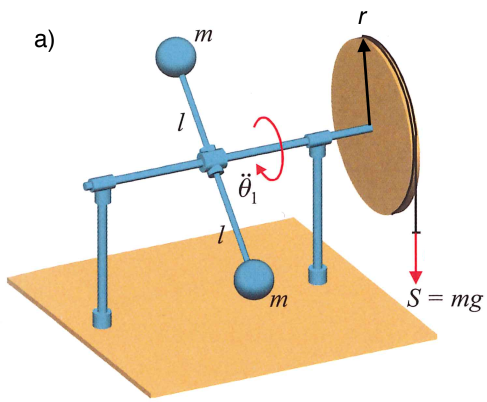


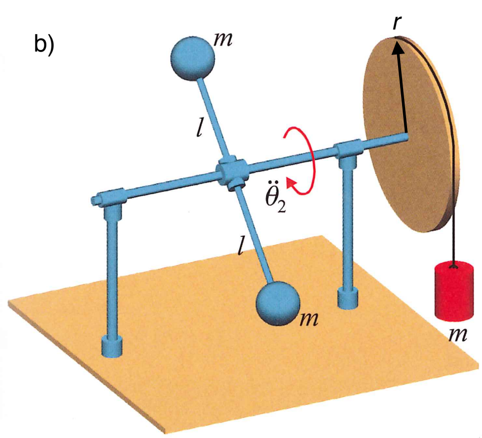
Del 2

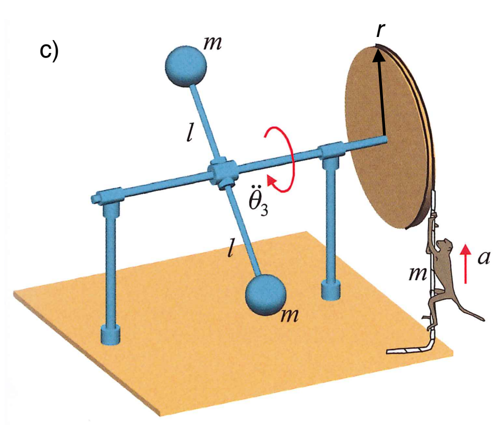
1. Betrakta anordningen i figuren bestående av en masslös stång som kan rotera friktionsfritt kring en horisontell axel. En annan stång, också den masslös, är monterad vinkelrät mot den första och uppbär två lika klot, vardera med massan m enligt figuren. En vajer är lindad kring en masslös trumma med radien r som är fäst i den horisontella stången.

   Betrakta tre olika fall enligt figurerna:
   a) Man drar i vajern med en dragkraft $S = mg$.
   b) En vikt med massan m är fäst i vajern.
   c) En apa med massan m klättrar uppför vajern med accelerationen a relativt marken.

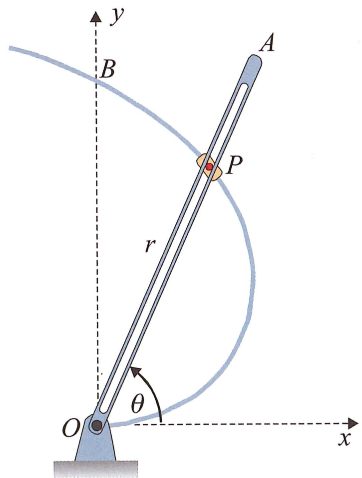
   Bestäm anordningens vinkelacceleration $\ddot{\theta}$ i de tre olika fallen om avståndet från rotationsaxeln till varje klots mittpunkt är l.



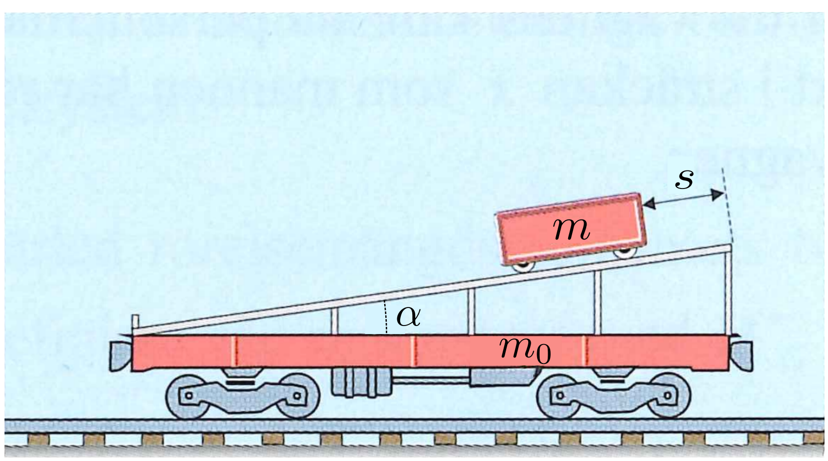




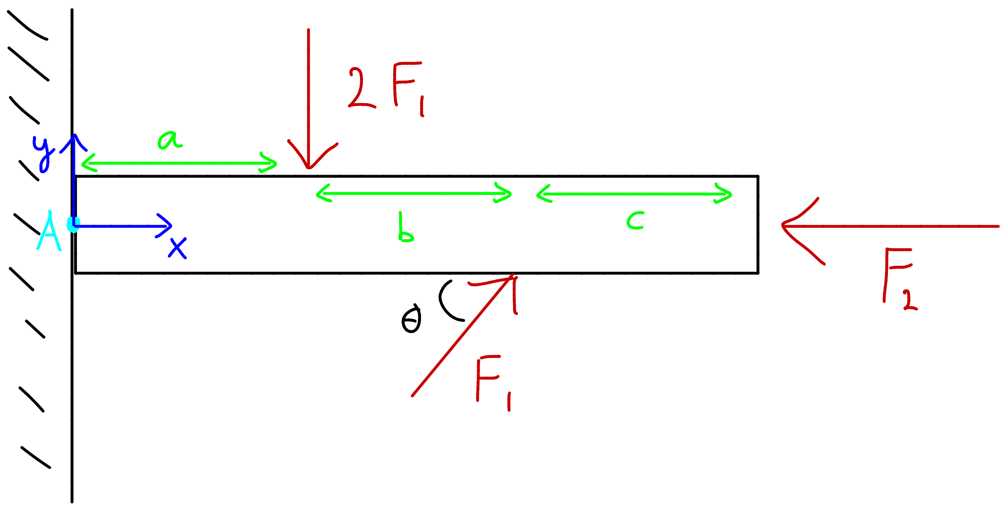
2. Betrakta hylsan P som kan glida längs en metalltråd formad som en spiral i x-y planet som ges av ekvationen $r = b\theta$, där r är avståndet från O till hylsan, θ vinkeln mellan armen OA och den horisontella riktningen och b är en konstant. Armen OA startar från vila i horisontellt läge och börjar rotera med en konstant vinkelacceleration $\ddot{\theta} = \alpha$ kring punkten O. Bestäm hylsans hastighet och acceleration i punkten B, vilken är skärningspunkten mellan spiraltråden och den vertikala y–axeln.



3. En liten vagn med massan m kan rulla fritt utför en masslös ramp med lutningsvinkeln α. Rampen är monterad på en större vagn med massan m_0 som också rullar fritt längs ett rakt horisontellt spår. Hela systemet är i vila från början med den lilla vagnen högst upp på rampen ($s = 0$ enligt figuren). Bestäm den stora vagnens hastighet v som funktion av sträckan s.



Statik U1



$$\vec{R} = \left(F_1\cos(\theta) - F_2\right)\hat{x} + \left(F_1\sin(\theta) - 2F_1\right)\hat{y}$$
$$= \left(F_1\cos(\theta) - F_2\right)\hat{x} + F_1\left(\sin(\theta) - 2\right)\hat{y}$$

$$M_A = -2F_1 a + F_1\sin(\theta)(a+b) = F_1\left(\sin(\theta)(a+b) - 2a\right)$$

Var skär verkningslinjen för resultanten balken?

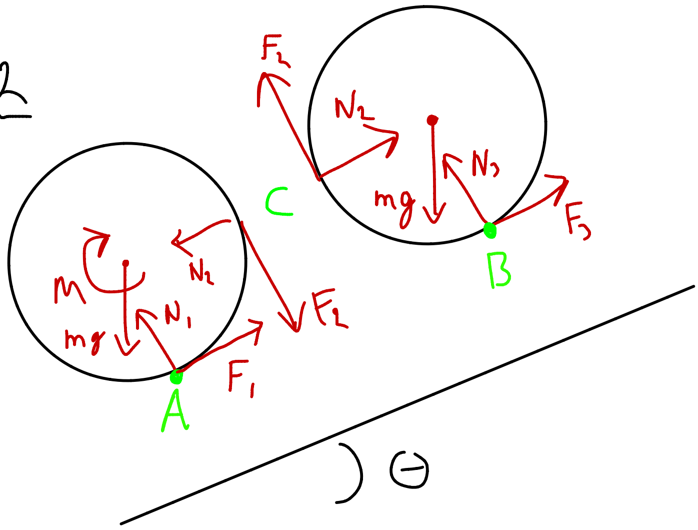
Låt $\vec{p} = x\hat{x}$, vi söker x s.a. $\vec{p}\times\vec{R} = M_A\hat{z}$

$$\vec{p}\times\vec{R} = (x\hat{x})\times\left(R_x\hat{x} + R_y\hat{y}\right) = xR_y\hat{z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{M_A}{R_y} = \frac{-2a + \sin(\theta)(a+b)}{\sin(\theta) - 2}$$

Statik U2

Friläggning av de två cylindrarna:



Enligt antagande gäller att $\begin{cases} F_1 < \mu_s N_1 \\ F_3 < \mu_s N_3 \end{cases}$, dvs ingen glidning vid A & B.

Om cylindrarna ska rulla nedåt krävs då att det sker glidning vid C, dvs $F_2 = \mu_k N_2$.

Vid konstant hastighet råder jämvikt. För att eliminera så många obekanta som möjligt kan man titta på momentjämvikt kring A & B:

$$\begin{cases} \circlearrowleft A: & mg\sin(\theta)r + N_2 r - \mu_k N_2 r - M = 0 \\ \circlearrowleft B: & mg\sin(\theta)r - N_2 r - \mu_k N_2 r = 0 \end{cases}$$

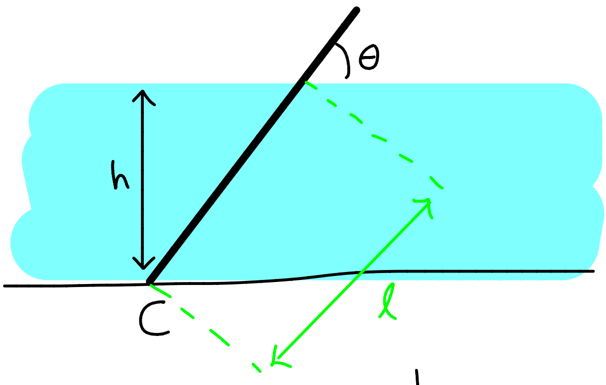
$$\begin{cases} N_2(r - \mu_k r) - M = -S & (1) \\ N_2(r + \mu_k r) = S & (2) \end{cases} \quad \text{där } S = mgr\sin(\theta)$$

$$(2) \Rightarrow N_2 = \frac{S}{r(1+\mu_k)}$$

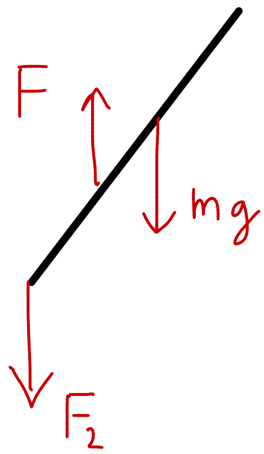
$$(1) \Rightarrow M = S\frac{1-\mu_k}{1+\mu_k} + S = \frac{2S}{1+\mu_k} = \frac{2mgr\sin(\theta)}{1+\mu_k}$$

$$[M] = kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m = \frac{kgm^2}{s^2} = [\text{kraft} \cdot \text{längd}]$$

Statik U3



Friläggning av staven:



$$\sin(\theta) = \frac{h}{\ell} \Rightarrow \ell = \frac{h}{\sin(\theta)}$$

Låt A beteckna stavens okända tvärsnittsarea.
Enligt Arkimedes princip verkar det en kraft F genom tyngdpunkten för den undanträngda vattenmassan med storlek

$$F = \ell A \rho g$$

Hela stavens massa ges av

$$m = LA\rho'$$

Momentjämvikt kring C eliminerar F_2 och vi får:

$$\circlearrowleft C: \quad F\cos(\theta)\,\ell - mg\cos(\theta)\,L = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho g \frac{h^2}{\sin^2(\theta)} - L^2\rho' g = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2(\theta) = \frac{\rho g h^2}{\rho' g L^2}$$

$$\Rightarrow \quad \sin(\theta) = \frac{h}{L}\sqrt{\frac{\rho}{\rho'}}$$

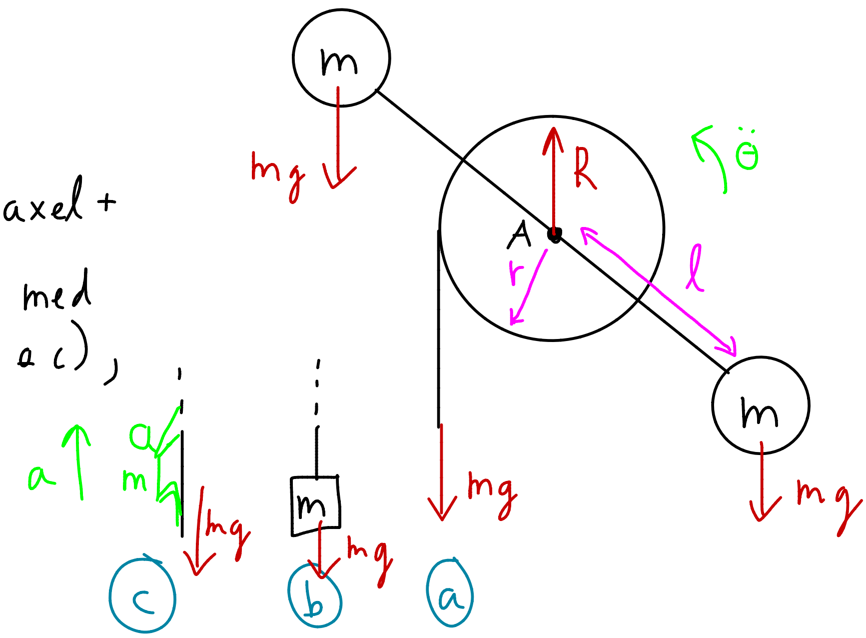
(här är det den positiva roten som motsvarar vår uppställning.)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta = \sin^{-1}\left(\frac{h}{L}\sqrt{\frac{\rho}{\rho'}}\right)}$$

$\left[\frac{h}{L}\sqrt{\frac{\rho}{\rho'}}\right]$ = enhetslöst

Dynamik U1

Friläggning av systemet axel + kulor + trumma (tillsammans med tyngd och apa i fall b & c), sett från trummans sida:



Observera att kulornas tyngdkrafter ger upphov till lika stora men motriktade vridmoment kring axeln.

(a):

Systemets totala rörelsemängdsmoment kring axeln A ges av

$$H_A = \overset{\text{2 kulor}}{2}m\underbrace{\ell}_{\text{hävarm}}\cdot\overbrace{(\ell\dot{\theta})}^{\text{hastighet}} \quad \Rightarrow \dot{H}_A = 2m\ell^2\ddot{\theta},$$

och det totala vridmomentet kring A: $M_A = mgr$

$$\circlearrowleft A: \quad \dot{H}_A = M_A \iff 2m\ell^2\ddot{\theta} = mgr$$

$$\Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} = \frac{gr}{2\ell^2}$$

(b):

$$H_A = 2m\ell^2\dot{\theta} + \underbrace{mr^2\dot{\theta}}_{\text{tyngdens bidrag}} \Rightarrow \dot{H}_A = m\ddot{\theta}(2\ell^2 + r^2)$$

$$M_A = mgr$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{gr}{2\ell^2 + r^2}$$

c:

$$H_A = -mvr + 2ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{H}_A = -mar + 2ml^2\ddot{\theta}$$

$$M_A = mgr$$

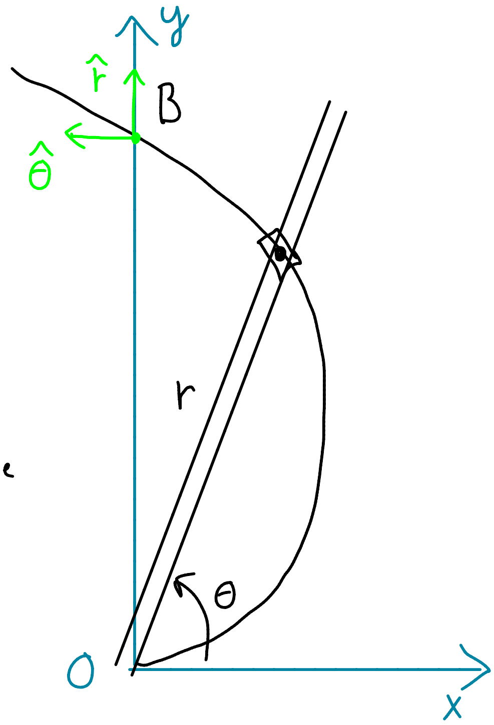
$$\dot{H}_A = M_A \Leftrightarrow -mar + 2ml^2\ddot{\theta} = mgr$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{(g+a)r}{2l^2}}$$

I alla tre svar ges dimensionsanalysen av

$$[\ddot{\theta}] = \frac{\frac{m}{s^2} \cdot m}{m^2} = \frac{1}{s^2}$$

Dynamik U2



Spiralen ges av $r = b\theta$.
Vid B är $\theta = \theta_B = \frac{\pi}{2}$

$r = r_B = b\frac{\pi}{2}$.

För att slippa införa tid som en ytterligare variabel kan vi använda att

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \cdot \dot{\theta}$$ vilket ger att

$$\ddot{\theta}\, d\theta = \dot{\theta}\, d\dot{\theta}$$ (analogt med $a\,dx = v\,dv$)

Med konstant vinkelacceleration $\ddot{\theta} = \alpha$ kan detta integreras:

$$\int_0^{\pi/2} \ddot{\theta}\, d\theta = \int_0^{\omega} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} \Rightarrow \frac{\pi}{2}\alpha = \frac{\omega^2}{2} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\pi\alpha}$$

där ω är vinkelhastigheten vid B.

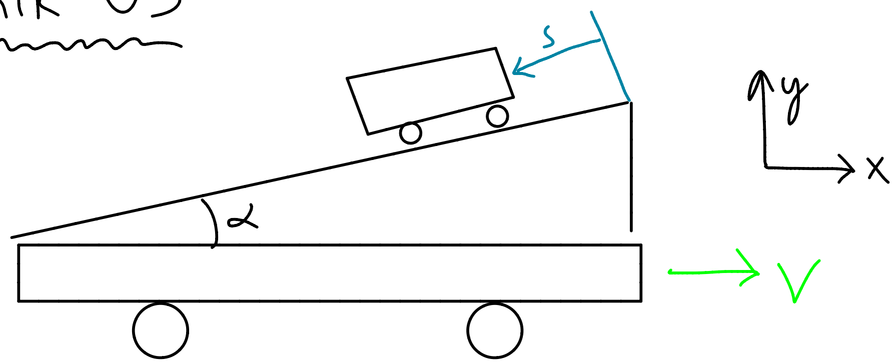
Insättning i uttrycken för hastighet och acceleration i polära koordinater ger nu

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} = b\dot{\theta} = b\sqrt{\pi\alpha} \\ v_\theta = r\dot{\theta} = b\frac{\pi}{2}\sqrt{\pi\alpha} \end{cases}$$ $[v_r] = [v_\theta] = m \cdot \sqrt{\frac{1}{s^2}} = \frac{m}{s}$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = b\ddot{\theta} - r\dot{\theta}^2 = b\alpha - r\pi\alpha = b\alpha - b\frac{\pi^2}{2}\alpha = b\alpha\left(1 - \frac{\pi^2}{2}\right) \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = r\alpha + 2b\omega^2 = r\alpha + 2\pi b\alpha = b\frac{\pi}{2}\alpha + 2\pi b\alpha = \frac{5}{2}b\alpha\pi \end{cases}$$

$$[a_r] = [a_\theta] = m \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{m}{s^2}$$

Dynamik U3



Inga externa krafter utövar något arbete på systemet bestående av de båda vagnarna.
Inga externa krafter ger heller någon impuls längs markens riktning.

$\Rightarrow$ Energi och rörelsemängd i x-led är bevarade.

Den lilla vagnens hastighet ges av

$$\vec{V}_m = (V - \dot{s}\cos(\alpha))\,\hat{x} - \dot{s}\sin(\alpha)\,\hat{y}$$

Rörelsemängdens bevarande i x-led ger

$$0 = m(V - \dot{s}\cos(\alpha)) + m_0 V \;\Rightarrow\; \dot{s} = \frac{m_0 + m}{m}\,\frac{V}{\cos(\alpha)} \quad (1)$$

Energikonservering ger nu

$$0 = \frac{1}{2}m_0 V^2 + \frac{1}{2}m\underbrace{\left((V - \dot{s}\cos(\alpha))^2 + \dot{s}^2\sin^2(\alpha)\right)}_{|V_m|^2} - mg\,s\cdot\sin(\alpha) \quad (2)$$

(1) insatt i (2) ger sedan

$$V = \sqrt{\frac{2gs\cdot\sin(\alpha)}{\frac{m_0}{m} + \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 + \left(1 + \frac{m_0}{m}\right)^2\tan^2(\alpha)}}$$

$$[V] = \sqrt{\frac{\frac{m}{s^2}\cdot m}{kg/kg}} = \frac{m}{s}$$